Algumas noções de lógica

10 de Agosto de 2018

1 Logica proposicional

1.1 Proposições, valor lógico e tabelas de verdade

Um raciocinio matemático é a concatenação de frases. Mas não todas as frases fazem parte da linguagem matemàtica. Por exemplo: as frases:

Que hora é?
Que legal!

não fazem parte de uma linguagem matemática. Precisamos de frases que sejam *enunciados declarativos*. Antes de tudo *enunciados*. Desta forma eliminámos de uma vez todas as frases interogativas e exclamativas. Depois a frase tem que ser *declarativa*, ou seja tem que *declarar* algo. Mais ainda é preciso que se possa *determinar* se este enunciado é *verdadeiro ou falso*. Não é necessario *saber* se é verdadeiro ou falso, mas que haja a possibilidade (eventualmente esta possibilidade pode ser muito dificil a por em pratica) de *determinar* se o enunciado é verdadeiro ou falso. Em outras palavras é necessario que à proposição p se possa atribuir um *valor lógico* $v(p)$, de *verdade* (V) ou *falsidade* (F). Um tal enunciado declarativo é chamado *proposição*. Proposições se indicam comunemete com letras pequenas: p, q, r, etc. Por exemplo os seguintes enunciados são proposições:

p: $1 + 1 = 2$
q: 3 é impar
r: $2\times\ 5 = 3$
s: o seu vizinho é carioca
t: O 45 % dos americanos gostam de suco de maçã.

O valor lógico das primeira, segunda e terça proposição é: $v(p) = V$, $v(q) = V$, $v(r) = F$. Não sabemos os valores lógicos $v(s)$, $v(t)$, mas é certo que estes podem ser determinados. Não são proposições as seguintes:

x é impar
este enunciado é falso

O primeiro enunciado depende de uma *variavel*, e pode ser verdade ou falso dependentemente de x. Mas enquanto x não esta fixado, não se pode determinar nenhum valor lógico. A segunda é um enunciado autoreferencial, e assumir que é falso ou que é verdadeiro leva necessariamente a uma contradição. Então este enunciado não pode assumir nenhum valor lógico.

Até agora vimos o que significa uma proposição simples. Podemos formar proposições complexas a partir de proposições simples graças aos *conetores lógicos* usuais, como *”e”, ”ou”, ”não”, ”implica”(ëntão”) , ”se e soamente se”*. Dada a importancia destes *cinco conetores lógicos*, vamos atribuir um simbolo por cada um deles.

$$\begin{array}{rl} \text{”e”} & \wedge \\ \text{”ou”} & \vee \\ \text{”não”} & \neg \\ \text{”implica”} & \rightarrow \\ \text{”se e soamente se ”} & \leftrightarrow \end{array}$$

Graças a eles podemos escrever de forma simbólicas proposições mais complexas. Por exemplo, se p é a proposição: ”hoje está sol”e q é a proposição ”hoje vou jogar a futebol”, a proposição $p \rightarrow q$ é: ”se hoje está sol, então vou jogar a futebol”e a proposição $\neg p$ é ”hoje não está sol”. Mas o que significa mesmo ”e”, ”ou”, ”não”, ”implica”(ëntão”) , ”se e soamente se”, qual é a definição formal destes conetores? Para perceber isto, temos que ver os conetores como *operações entre proposições*, da mesma forma que $+$ e $-$, $\times$ são operações entre numeros. Por exemplo a operação $+$ leva dois numeros x e y num terçeiro número $x + y$. Mas o que significa isto? O valor de $x + y$ depende dos valores de x e y segundo a tabela:

x	y	$x + y$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	2
2	1	3
...	...	...

Na mesma forma, dadas duas proposições p e q, *o valor lógico de* $\neg p$, $p \wedge q$, $p \vee q$, $p \rightarrow q$, $p \leftrightarrow q$ *depende somente dos valores lógicos de* p *e* q: por este motivos os conetores lógicos $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$ são *conetores funcionais dos valores de verdade*[1], ou *funções de valores de verdade*. As tabelas que dão os valores de verdade dos conetores, em função dos valores de verdade das proposições variaveis p e q se chamam *tabelas de verdade* e, para os conetores

$$\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$$

, são:

p	$\neg p$
V	F
F	V

p	q	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

p	q	$p \vee q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

p	q	$p \rightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

p	q	$p \leftrightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Os resultados

p	q	$p \rightarrow q$
F	V	V
F	F	V

na definição do conetor ”implica”eram conhecidos pelos lógicos latinos como *ex falso quodlibet*, ou seja, do falso segue qualquer coisa. Por exemplo, a proposição: ”se os elefantes voam,

[1] *”truth-functional connectives”* em inglês

então eu sou um extraterrestre"é verdadeira. Da mesma forma, a proposição "se os elefantes voam, a Puc-Rio é uma universidade brasileira"é verdadeira.

No que segue, indicaremos com $\top$ ou V a proposição incondicionalmente verdadeira, e com $\perp$ ou F a proposição incondicionalmente falsa. Da mesma forma que escrevemos as tabelas de verdade de $\neg p$, $p \wedge q$, $p \vee q$, $p \to q$, $p \leftrightarrow q$, se $P(p,q,r,s,t)$ é uma proposição complexa formada a partir das proposições componentes p,q,r,s,t, podemos escrever a tabela de verdade de $P(p,q,r,s,t)$ como:

p	q	r	s	t	$P(p,q,r,s,t)$
V	V	V	V	V	?
...					

No que segue escreveremos com letras majuscolas A,B,C,D,E,P,Q proposiçòes complexas, as vezes sem escrever as respectivas componentes.

Exercicio 1.1. Escrever as tabelas de verdade de $p \to (q \vee r)$.

Definição 1.2. Duas proposições complexas $P(p_1,\ldots,p_n)$ e $Q(p_1,\ldots,p_n)$ de componentes $p_1,\ldots,p_n$ se dizem *logicamentes equivalentes* se têem os mesmos valores lógicos, ou seja se têem as mesmas tabelas de verdade (em relação às componentes $p_1,\ldots,p_n$).

Exemplo 1.3. p é logicamente equivalente a $\neg\neg p$.

Exemplo 1.4. $p \to q$ é logicamente equivalente à $\neg p \vee q$. Fazer as tabelas de verdade e ver que são as mesmas. Da mesma maneira, $\neg q \to \neg p$ é logicamente equivalente a $p \to q$. $\neg q \to \neg p$ se chama o *contrapositivo* de $p \to q$. É tambem facil ver que $q \to p$ *não* é logicamente equivalente a: $p \to q$.

1.2 Tautologias e Contradições

Definição 1.5 (Tautologias)**.** Uma tautologia é uma proposição $P(p_1,\ldots,p_n)$ que é sempre verdadeira (tem sempre valor lógico V) qualquer seja o valor lógico das componentes $p_1,\ldots,p_n$.

Exemplo 1.6. A proposição $P(p,q) := (p \wedge q) \to p$ é uma tautologia. De fato, a tabela de verdade de $P(p,q)$ em relação às componentes p e q é :

p	q	$(p \wedge q) \to p$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	V

Notação 1.7. Se uma tautologia $P(p_1,\ldots,p_n)$ é da forma $P(p_1,\ldots,p_n) : Q(p_1,\ldots,p_n) \to R(p_1,\ldots,p_n)$ escreveremos que $Q(p_1,\ldots,p_n) \implies R(p_1,\ldots,p_n)$. Analogamente se uma tautologia $P(p_1,\ldots,p_n)$ é da forma $P(p_1,\ldots,p_n) : Q(p_1,\ldots,p_n) \leftrightarrow R(p_1,\ldots,p_n)$ escreveremos que $Q(p_1,\ldots,p_n) \iff R(p_1,\ldots,p_n)$.

Exercicio 1.8. Mostrar que $p \iff \neg\neg p$.

Exercicio 1.9. Mostrar as *regras de De Morgan*

$$\neg(p \vee q) \iff \neg p \wedge \neg q$$
$$\neg(p \wedge q) \iff \neg p \vee \neg q$$

No que segue escreveremos $(C \wedge D) \implies E$ tambem como $\left.\begin{array}{c} C \\ D \end{array}\right\} \implies E$. Existe uma relação muito forte entre o conceito de equivalencia lógica e de tautologia $\iff$:

Proposição 1.10. *Duas proposições complexas $A(p_1,\ldots,p_n)$ e $B(p_1,\ldots,p_n)$ são logicamente equivalentes (ou seja têem as mesmas tabelas de verdade respeito às componentes $p_1,\ldots,p_n$ se e soamente se $A(p_1,\ldots,p_n) \iff B(p_1,\ldots,p_n)$. Então, falar de equivalencia lógica ou dizer que duas proposições se equivalem tautologicamente é a mesma coisa.*

Demonstração. Mostramos antes de tudo que se $A(p_1,\ldots,p_n)$ e $B(p_1,\ldots,p_n)$ são logicamente equivalentes então $A(p_1,\ldots,p_n) \iff B(p_1,\ldots,p_n)$. Se $A(p_1,\ldots,p_n)$ e $B(p_1,\ldots,p_n)$ são logicamente equivalentes, então têem as mesmas tabelas de verdade respeito às componentes $p_1,\ldots,p_n$. Então podemos escrever:

p_1	p_2	$\ldots$	p_n	$A(p_1,\ldots,p_n)$	$B(p_1,\ldots,p_n)$
V	V	$\ldots$	V	X	X
V	V	$\ldots$	F	Y	Y
$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	Z	Z
F	F	$\ldots$	F	W	W

onde $X, Y, Z, W \in \{V, F\}$. Mas então temos a tabela:

p_1	p_2	$\ldots$	p_n	$A(p_1,\ldots,p_n)$	$B(p_1,\ldots,p_n)$	$A(p_1,\ldots,p_n) \leftrightarrow B(p_1,\ldots,p_n)$
V	V	$\ldots$	V	X	X	V
V	V	$\ldots$	F	Y	Y	V
$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	Z	Z	V
F	F	$\ldots$	F	W	W	V

ou seja, o valor de verdade de $A(p_1,\ldots,p_n) \leftrightarrow (p_1,\ldots,p_n)$ é sempre V, ou seja, $A(p_1,\ldots,p_n) \leftrightarrow (p_1,\ldots,p_n)$ é uma tautologia, e então $A(p_1,\ldots,p_n) \Leftrightarrow B(p_1,\ldots,p_n)$.

Mostramos agora que se $A(p_1,\ldots,p_n) \Leftrightarrow B(p_1,\ldots,p_n)$ então $A(p_1,\ldots,p_n)$ e $B(p_1,\ldots,p_n)$ são logicamente equivalentes. O fato que $A(p_1,\ldots,p_n) \Leftrightarrow B(p_1,\ldots,p_n)$ quer dizer que $A(p_1,\ldots,p_n) \leftrightarrow B(p_1,\ldots,p_n)$ é uma tautologia, ou seja, a proposição $A(p_1,\ldots,p_n) \leftrightarrow B(p_1,\ldots,p_n)$ é sempre verdadeira, quaisquer sejam os valores de verdade das componentes $p_1,\ldots,p_n$. Então podemos escrever a tabela de verdade:

p_1	p_2	$\ldots$	p_n	$A(p_1,\ldots,p_n)$	$B(p_1,\ldots,p_n)$	$A(p_1,\ldots,p_n) \leftrightarrow B(p_1,\ldots,p_n)$
V	V	$\ldots$	V	X_A	X_B	V
V	V	$\ldots$	F	Y_A	Y_B	V
$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	Z_A	Z_B	V
F	F	$\ldots$	F	W_A	W_B	V

onde $X_A, X_B, Y_A, Y_B, Z_A, Z_B, W_A, W_B \in \{V, F\}$. Mas $A(p_1,\ldots,p_n) \leftrightarrow B(p_1,\ldots,p_n)$ tem valor V se e somente se os valores de verdade de $A(p_1,\ldots,p_n)$ e de $B(p_1,\ldots,p_n)$ são os mesmos (por definição do conetor $\leftrightarrow$): então $X_A = X_B$, $Y_A = Y_B$, $Z_A = Z_B$, $W_A = W_B$. Mas entao $A(p_1,\ldots,p_n)$ e $B(p_1,\ldots,p_n)$ têem os mesmos valores de verdade, quaisquer sejam os valores de verdade das componentes $p_1,\ldots,p_n$. Mas então $A(p_1,\ldots,p_n)$ e $B(p_1,\ldots,p_n)$ são logicamente equivalentes. $\square$

Exercicio 1.11 (Modus Ponens).

$$\left.\begin{array}{c} p \\ p \to q \end{array}\right\} \implies q$$

ou seja $[p \wedge (p \to q)] \implies q$ é uma tautologia. O *modus ponens* se lê: *dado p então q, mas p, então q.* Provar por exercicio.

Exercicio 1.12 (Modus Tollens).

$$\left.\begin{array}{c} \neg q \\ p \to q \end{array}\right\} \implies \neg p$$

ou seja, $[(\neg q) \wedge (pq)] \to \neg p$ é uma tautologia. O *modus ponens* se lê: *dado p então q, mas não q, então não p.* Provar por exercicio.

Exercicio 1.13 (Transitividade das tautologias). Se $A \implies B$ e $B \implies C$ então $A \implies C$.

Definição 1.14. Uma proposição $P(p_1, \ldots, p_n)$ cujo valor lógico é sempre F, qualquer seja o valor das componentes, é chamada uma *contradição.*

exe $p \wedge \neg p$ é uma contradição. De fato, a tabela de verdade é:

p	$p \wedge \neg p$
V	F
F	F

Exercicio 1.15. Provar que A é uma tautologia se e soamente se $\top \implies A$. Provar que A é uma contradição se e soamente se $A \implies \bot$.

1.3 Derivações lógicas

Definição 1.16. Una *derivação lógica* de uma proposição B de uma proposição A é uma cadeia finita de tautologias $A \implies A_1 \implies A_2 \implies \ldots \implies A_n \implies B$.

Em pratica, no curso de uma derivação lógica, podemos usar dois tipos de tautologias: 1 $\implies$ e então será uma derivação por *inferença*, ou 2. equivalencia lógicas $\iff$. Se com a primeira, dado $A \implies B$, e se temos A, a unica coisa que podemos fazer é derivar B, se temos $A \iff B$ podemos:

- Dado A, derivar B
- dado B, derivar A
- dada uma proposição que contenha A, derivar uma outra proposição com B no lugar de A: isto se chama "substituição".

Regras de equivalencia:

$$p \iff \neg\neg p \quad \text{dupla negação}$$

$$p \to q \iff \neg p \vee q \quad \text{implicação}$$

$$\neg(p \vee q) \iff \neg p \wedge \neg q \quad \text{Lei de De Morgan}$$

$$\neg(p \wedge q) \iff \neg p \vee \neg q \quad \text{Lei de De Morgan}$$

$$p \to q \iff \neg q \to \neg p \quad \text{contrapositivo}$$

$$p \vee q \iff q \vee p \quad \text{comutatividade}$$

$$p \wedge q \iff q \wedge p \quad \text{comutatividade}$$

$$p \vee (q \vee r) \iff (p \vee q) \vee r \quad \text{associatividade}$$

$$p \wedge (q \wedge r) \iff (p \wedge q) \wedge r \quad \text{associatividade}$$

$$p \vee (q \wedge r) \iff (p \vee q) \wedge (p \vee r) \quad \text{distributividade}$$

$$p \wedge (q \vee r) \iff (p \wedge q) \vee (p \wedge r) \quad \text{distributividade}$$

$$F \vee p \iff p$$

$$F \wedge p \iff F$$

$$V \vee p \iff V$$

$$V \wedge p \iff p$$

Regras de inferencia:

$$\left.\begin{array}{r} p \\ p \to q \end{array}\right\} \implies q \quad \text{modus ponens}$$

$$\left.\begin{array}{r} \neg q \\ p \to q \end{array}\right\} \implies \neq p \quad \text{modus tollens}$$

$$p \wedge q \implies p \quad \text{simplificação}$$

$$p \implies p \vee q \quad \text{adição}$$

Exercicio 1.17. Escrever uma derivação lógica de

$$\left.\begin{array}{r} p \\ p \to q \\ q \to r \end{array}\right\} \implies r\ .$$

(simplificações + modus ponens).

Exercicio 1.18. Provar (escrever uma sequencia de demostração) que:

$$(p \vee q) \wedge \neg p \implies q$$

Exercicio 1.19 (Dedução)**.** Provar que

$$p \to (q \to r) \iff \left.\begin{array}{r} p \\ q \end{array}\right\} \to r\ .$$

Exercicio 1.20 (Propriedade distributiva)**.** Provar que

$$p \vee (q \wedge r) \iff (p \vee q) \wedge (p \vee r)$$

e que

$$p \wedge (q \vee r) \iff (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$$

Exercicio 1.21. Provar que $(A \to B) \wedge (A \to C) \iff A \to (B \wedge C)$. Deduzir que se $A \implies B$ e $A \implies C$ então $A \implies (B \wedge C)$.

Exercicio 1.22. Provar que

$$\left.\begin{array}{r} p \to q \\ q \to r \end{array}\right\} \implies p \to r\ .$$

Demonstração.

$$\left.\begin{array}{r} p \to q \\ q \to r \end{array}\right\} \iff \left.\begin{array}{r} V \\ p \to q \\ q \to r \end{array}\right\} \iff \left.\begin{array}{r} q \vee \neg q \\ p \to q \\ q \to r \end{array}\right\} \iff \left.\begin{array}{r} q \\ p \to q \\ q \to r \end{array}\right\} \vee \left.\begin{array}{r} \neg q \\ p \to q \\ q \to r \end{array}\right\}$$

$$\iff \left.\begin{array}{r} \neg q \\ p \to q \end{array}\right\} \vee \left.\begin{array}{r} q \\ q \to r \end{array}\right\} \implies \neg p \vee r \iff p \to r$$

Exercicio 1.23. Provar que se $A \implies B$ então, por qualquer outra proposição C ou D, temos: $A \vee C \implies B \vee C$ e $A \wedge C \implies B \wedge C$. Mas provar que $\neg A \not\Longrightarrow \neg B$; provar que $A \to D \not\Longrightarrow B \to D$, $A \leftrightarrow D \not\Longrightarrow B \leftrightarrow D$.

Exercicio 1.24. Provar que

$$\left.\begin{array}{r} p \\ p \to r \\ q \to \neg r \end{array}\right\} \implies \neg q$$

Exercicio 1.25. Provar que

$$\left.\begin{array}{r} p \to \neg q \\ r \to (p \wedge q) \end{array}\right\} \implies \neg r\ .$$

Solução. Temos antes de tudo que:

$$\left.\begin{array}{c} p \to \neg q \\ r \to (p \wedge q) \end{array}\right\} \iff \left.\begin{array}{c} \top \\ p \to \neg q \\ r \to (p \wedge q) \end{array}\right\} \iff \left.\begin{array}{c} p \vee \neg p \\ p \to \neg q \\ r \to (p \wedge q) \end{array}\right\} \iff \left.\begin{array}{c} p \\ p \to \neg q \\ r \to (p \wedge q) \end{array}\right\} \vee \left.\begin{array}{c} \neg p \\ p \to \neg q \\ r \to (p \wedge q) \end{array}\right\}$$

onde a ultima equivalencia segue da propriedade distributiva. Agora

$$\left.\begin{array}{c} p \\ p \to \neg q \\ r \to (p \wedge q) \end{array}\right\} \implies \left.\begin{array}{c} \neg q \\ r \to (p \wedge q) \end{array}\right\} \implies \left.\begin{array}{c} \neg q \\ r \to (p \wedge q) \\ r \to q \end{array}\right\} \implies \left.\begin{array}{c} r \to (p \wedge q) \\ \neg r \end{array}\right\} \implies \neg r$$

e

$$\left.\begin{array}{c} \neg p \\ p \to \neg q \\ r \to (p \wedge q) \end{array}\right\} \implies \left.\begin{array}{c} \neg p \\ p \to \neg q \\ r \to (p \wedge q) \\ r \to p \end{array}\right\} \implies \left.\begin{array}{c} p \to \neg q \\ r \to (p \wedge q) \\ \neg r \end{array}\right\} \implies \neg r\ .$$

Então se conclui por a propriedade distributiva. Motivar todos os passos.

Uma outra demonstração, mais breve, é:

$$\left.\begin{array}{c} p \to \neg q \\ r \to (p \wedge q) \end{array}\right\} \iff \left.\begin{array}{c} \neg p \vee \neg q \\ r \to (p \wedge q) \end{array}\right\} \iff \left.\begin{array}{c} \neg(p \wedge q) \\ r \to (p \wedge q) \end{array}\right\} \implies \neg r$$

por modus tollens.

Exercicio 1.26. Derivar que:

$$\left.\begin{array}{c} p \to q \\ (p \wedge q) \to r \\ \neg r \end{array}\right\} \implies \neg p$$

Solução.

$$\left.\begin{array}{c} p \to q \\ (p \wedge q) \to r \\ \neg r \end{array}\right\} \implies \left.\begin{array}{c} p \to q \\ \neg(pq) \end{array}\right\} \implies \left.\begin{array}{r} p \to q \\ \neg p \vee \neg q \end{array}\right\} \implies \left.\begin{array}{r} p \to q \\ p \to \neg q \end{array}\right\} \iff \left.\begin{array}{r} p \to q \\ q \to \neg p \end{array}\right\} \implies p \to \neg p \iff \neg p$$

Aprofundamento

Algumas observações sobre o conetor $\rightarrow$.

A tabela de verdade acima define completamente o conetor "implica". Mesmo pelo facto de ter que ser um conetor *funcional dos valores de verdade*, o seu significado em lógica proposicional não é exactamente o significado linguistico em português; este facto pode levar a considerar exemplos contra-intuitivos e comportamentos estranhos pelo sentido comun, e até verdadeiro paradoxos. Na lingua portuguesa (mas poderia ser inglesa, italiana ou uma lingua qualquer), o conetor "implica", ou a sua forma "se..., então..."pode ter diferente significados semânticos: por exemplo:

1. Lógico: "Se todos os filosofos são pensadores, e Socrate é um filosofo, então Socrate é um pensador"ou "Se todos as árvores são vegetais e a mangueira é uma árvore, então a mangueira é um vegetal", ou "Se você vive em Nova Iorque, então voce não vive na California";
2. Causal (o mais comun): "Se você deixar cair um copo (de vidro) de uma mesa, o copo se parte"; ou "Se voce deixar uma bola em cima de um plano inclinado, a bola rola para baixo".
3. Definicional: "Se um número é par, então é divisível por dois";
4. Decisional: "Se você compra este produto, então lhe faço um desconto"

Em todos estes casos, ha sempre uma relação *semântica*, ou seja, de *significado* entre o antecedente, (ou implicante ou *protasis*) e o consequente (ou implicado ou *apodosis*). Esta forte relação semântica faz com que o conetor "implica"nestes casos não seja um *conetor funcional dos valores de verdade*: por exemplo, no sentido comun a afirmação:

Se Gilberto vive em Nova Iorque, então Gilberto vive na California

é sempre falsa, dado o contraste semântico dado pelo facto que que Nova Iorque não esta na California, mesmo que Gilberto viva ou não em Nova Iorque, ou que Gilberto viva ou não em California. Consideramos agora:

Se Gilberto vive em Los Angeles, então Gilberto vive na California.

é sempre verdadeira, qualquer seja o sitio onde vive Gilberto. Vemos então que no sentido comun, em que a interpretação do sentido da afirmação condicional depende do conteudo semântico e das relações semânticas das componentes, o conetor "implica"não pode ser funcional dos falores de verdade. Por esta razão, o sentido do "implica"que se usa em lógica proposicional é o significado de *implicação material*, que *não depende de forma nenhuma do significado das componentes, mas só do valores lógicos delas e é definido pela tabela de verdade acima.* Observamos que o sentido da *implicação material* é o sentido mais fraco de todas os sentidos de "implicação"explicado antes, e, de uma certa forma, é o mínimo significado comun à todos eles. Consequência desta decisão, podemos formar afirmações condicionais onde não ha relação nenhuma entre antecedente e consequente (e que não têm muito sentido em lingua corrente), como:

Se os burros são azuis, então $2 + 2 = 4$.

Reparamos que, mesmo que não faça muito sentido na lingua comun, a proposição é verdadeira na lógica proposicional. Podemos tentar de dar uma interpretação intuitiva da *implicação material* da forma seguinte: uma proposição condicional $p \rightarrow q$ estabelece um *vinculo* ou uma *promessa*, pelo qual se p é verdadeira, então tem que ser verdadeira tambem q; segundo esta interpretação a afirmação $p \rightarrow q$ é verdadeira numa situação (de valores de verdade) em que o vinculo permanece ou a promessa foi mantida, e é falsa numa situação onde o vinculo é quebrado. Por exemplo:

Se estou bem de saude, vou às aulas

A interpretação da tabela de verdade é a seguinte:

1. Estou bem de saude e vou às aulas: a promessa é mantida, e a afirmação é verdadeira: $v(p) = T$, $v(q) = T$, então $v(p \rightarrow q) = T$.

2. Não estou bem de saude e vou às aulas (na mesma): a promessa é mantida (não quebramos nenhum vinculo: só prometemos que iamos as aulas se estavamos bem de saude, mas, segundo a promessa feita, podemos ir tambem se não estamos bem), e a afirmação é verdadeira: $v(p) = F$, $v(q) = T$, então $v(p \to q) = T$;

3. Não estou bem de saude e não vou às aulas: a promessa é mantida (não quebramos nenhum vinculo: só prometemos que iamos as aulas se estavamos bem de saude, mas não estamos, segundo a promessa feita, podemos ficar em casa), e a afirmação é verdadeira: $v(p) = F$, $v(q) = F$, então $v(p \to q) = F$;

4. Estou bem de saude e não vou às aulas (na mesma): não mantemos a promessa e quebramos vinculo: prometemos que iamos as aulas se estavamos bem de saude, mas estavamos bem e não fomos, e a afirmação é falsa: $v(p) = T$, $v(q) = F$, então $v(p \to q) = F$. O fato que a *implicação material* leva a exemplos contra-intuitivos é um fato antigo e conhecido, e ha uma toda uma literatura que trata de *paradoxos da implicação material*[2]. Ha até escolas de lógica filosófica que recusam a implicação material.

[2]Por exemplo "se 2 é impar, então 2 é par", como todas as proposições $\neg p \to p$, é verdadeira, ou "Se Nadia esta em Barcelona então Nadia esta em Madrid ou se Nadia esta em Madrid então Nadia esta em Barcelona", como todas as proposições do tipo $(p \to q) \vee (q \to p)$, é verdadeira. Até a proposição $(p \to q) \vee (q \to r)$, é sempre verdadeira

2 Lógica dos predicados

A lógica dos predicados è uma extensão da lógica proposicional que permite muito mais poder expressivo. Por exenplo, o famoso sillogismo:

Todos os homens são mortais
Socrate è um homem
Então Socrate è mortal

nào se pode exprimir de forma eficaz na lógica proposicional. Na lógica proposicional teriamos que formular tres proposicões p, q, r que não teriam relação evidente entre elas. Mas a eficacia do silogismo esta mesmo na relação de geral/particular que esta nas proposiçõs acima.

2.1 Predicados

Definição 2.1. Um *predicado* è um enunciado declarativo $P(x_1, \ldots, x_n)$ dependente de variaveis $x_1, \ldots, x_n$, pertecentes a um universo $\mathcal{U}$, cujo valor lógico pode ser determinado por cada valor das variáveis no universo $\mathcal{U}$.

Em outras palavras um predicado é uma familia de proposições dependentes de algumas variáveis.

Exemplo 2.2.

$$P(x) : x \text{ è par}$$

onde $\mathcal{U} = \mathbb{Z}$ é um predicado.

$$Q(x, y) : x \text{ é mais pesado de } y \ ,$$

onde aqui $\mathcal{U}$ é um conjunto de objetos.

$$E(x) : x^2 - x - 2 = 0$$

onde $\mathcal{U} = \mathbb{R}$, é um predicado. O valor lógico dos predicados depende do valor da variàvel. Por exemplo $v(P(2)) = V$, $v(Q(\text{pluma, maça})) = F$, $v(E(3)) = F$.

Exemplo 2.3. Qualquer proposição da lógica proposicional é vista como un predicado costante, ou seja, não dependente de nenhuma variável. Se diz tambem que é uma *costante proposicional.* Por esta razão a lógica dos predicados é uma *extensão* da lógica proposicional.

Nota 2.4. Os predicados não são proposições. Mas, como se ve nos exemplos acima, podem tornar-se proposições. Por exemplo, uma pripeira forma de obter uma proposição a partir de um predicado é avaliarla num elemento fixado. Por exemplo, dado o predicado $P(x), x \in \mathcal{U}$, tomando qualquer elemento $x_0 \in \mathcal{U}$ *fixado*, $P(x_0)$ é uma proposição.

2.2 Quantificadores

Os predicados não são proposições porque contêem variáveis livres. Como vimos, uma forma de tornar proposição um predicado é avaliar o predicado num elemento fixado do universo, assim de "matar"a variável livre.

Uma outra forma é de antepor *quantificadores* a um predicados. Um quantificador modifica um predicado precisando se todos ou alguns elementos do universo satisfazem o predicado. Por exemplo podemos considerar a veridicidade ou a falsidade de todas as proposições $P(x)$ ao mesmo tempo, por cada $x \in \mathcal{U}$: isto quer dizer que o enunciado *por cada* x $P(x)$ tem valor logico determinado, e então é uma proposição. Da mesma forma podemos considerar a veridicidade ou a falsidade de pelo menos uma das proposições $P(x)$: isto quer dizer que o enunciado: *existe pelo menos um* x *tal que* $P(x)$ tem um valor lógico determinado e então é uma proposição. No primeiro caso aplicamos o *quantificador universal* ou *por cada*, denotado com $\forall$, no segundo caso aplicamos o *quantificador existencial* ou *existe*, denotado com $\exists$. Note-se que uma vez que é aplicado o quantificador a uma variável, aquela variavel já não é livre.

Exemplo 2.5. Consideramos o predicado: $E(x) : x^2 - x - 2 = 0$, com universo $\mathcal{U} = \mathbb{R}$. A proposição

$$(\forall x)E(x)$$

é claramente falsa, porquê 1 não é raiz. Mas a proposição

$$(\exists x)E(x)$$

é verdadeira se e soamente se a equação $x^2 - x - 2 = 0$ tiver soluções (tiver pelo menos uma solução) no universo $\mathbb{R}$, o que é verdade, porquê -1 é raiz.

Exercicio 2.6. Seja $E(x) : x \cdot 0 = 0$, $x \in \mathbb{R}$. Qual é o valor lógico da proposição $(\forall x)E(x)$ e o da $(\exists x)E(x)$?

2.3 Exemplos de predicados

Dado que a lógica dos predicados é uma extensão da lógica proposicional,

Exemplo 2.7. Como se traduz na lógica dos predicados "existe um negativo $x \in \mathbb{Z}$ tal que $x^2 - x - 6 = 0$?

Exercicio 2.8. Traduzir na lógica dos predicados: Se x é par e y é impar, então $x + y$ é impar. Universo $= \mathbb{Z}$.

Exercicio 2.9. Traduzir na lógica dos predicados: Por cada x, existe $y > x$. Universo $\mathbb{R}$. Solução: Seja $G(x, y)$ o predicado $x < y$. A proposição é $(\forall x)(\exists y)G(x, y)$. Note-se que não é a mesma coisa de $(\forall y)(\exists x)G(x, y)$. *A ordem dos quantificadores é importante!.*

Nota 2.10. A ordem dos quantificadores se pode trocar se forem do mesmo tipo, ou os dois existenciais ou os dois universais.

Exemplo 2.11. Seja $\mathcal{U} = \mathbb{Z}$. Seja $P(n) : (\exists k)(n = 2k)$, ou seja: n é par. Seja $Q(n) := (\exists h)(n = 4h)$, ou seja n é divisivel por 4. A proposição

$$(\forall n)(P(n) \rightarrow Q(n))$$

é verdadeira.

2.4 Negação e quantificadores

Consideramos com exemplo o seguinte predicado: $L(x)$: x é mentiroso, com universo $\mathcal{U}$= conjuntos de todos os homens. Consideramos agora a proposição:

$$(\forall x)L(x)$$

ou seja, *todos os homens são mentirosos.* Supomos que queremos aplicar o operador lógico negação $\neg$ a esta proposição. A negação $\neg(\forall x)L(x)$ soa como *não todos os homens são mentirosos*, mas podemos reformular-la de forma que seja mais elegante em português da forma seguinte: se não é verdade que todos os homens são mentirosos, então tem que *existir pelo menos um homem que não é mentiroso.* Esta ultima proposição se traduz de volta em lógica dos predicados como: $(\exists x)\neg L(x)$. Neste caso a intuição e o sentido comum nos levaram a estabelecer a primeira regra de negação: a

$$\textit{Regra de negação universal} \qquad \neg(\forall x)P(x) \iff (\exists x)\neg P(x)$$

onde $P(x)$ é um qualquer predicado. Consideramos o predicado $Q(x) = \neg P(x)$. Substituindo $Q(x)$ na regra de negação universal temos:

$$(\exists x)\neg\neg P(x) \iff \neg(\forall x)\neg P(x)$$

e dado que a dupla negação de uma proposição é equivalente a proposição original, temos $(\exists x)P(x) \iff \neg(\forall x)\neg P(x)$ e ainda aplicando $\neg$ temos por uma segunda dupla negação:

$$\textit{Regra de negação existencial} \qquad \neg(\exists x)P(x) \iff (\forall x)\neg P(x)\ .$$

Exemplo 2.12. Seja $\mathcal{U}$ universo = conjunto dos poligonos. $Q(x)$ é o predicado: x é um triangulo. $P(x)$ é o predicado: x é regular. Consideramos a proposição: "todos os triangulos são poligonos regulares", que se traduz, na lógica dos predicados, como: $(\forall x)(Q(x) \to P(x))$. Se queremos negar esta proposição aplicamos a regra ne negação universal:

$$\neg(\forall x)(Q(x) \to P(x)) = (\exists x)\neg(Q(x) \to P(x)) = (\exists x)\neg(\neg Q(x) \vee P(x)) = (\exists x)[Q(x) \wedge \neg P(x)]$$

ou seja, "existe um triangulo que não é um regular".

Exemplo 2.13. Seja $\mathcal{U}$= conjunto das faces de uma (classica) bola de futebol. Consideramos os seguintes predicados: $P(x)$: x é pentagono. $E(x)$; x é exagono. $B(x,y)$:= x confina com y. Traduzimos em lógica formal as seguintes proposições:

1. Não ha dois pentagonos que confinam um com o outro.

$$\begin{aligned}\neg(\exists x)(\exists y)[P(x) \wedge P(y) \wedge B(x,y)] &= (\forall x)(\forall y)\neg[P(x) \wedge P(y) \wedge B(x,y)]\\ &= (\forall x)(\forall y)[\neg(P(x) \wedge P(y)) \vee \neg B(x,y)]\\ &= (\forall x)(\forall y)[P(x) \wedge P(y) \to \neg B(x,y)]\end{aligned}$$

2. Cada pentágono confina com algum exagono.

$$(\forall x)[P(x) \to (\exists y)(E(y) \wedge B(x,y))]$$

3. Cada exagono confina com outro exagono.

$$(\forall x)[E(x) \to (\exists y)(E(y) \wedge B(x,y))]$$

Exercicio 2.14 (Definição de limite)**.** Noção central do cálculo, a definição de limite λ para uma função $f(x)$ à volta de um ponto x_0 diz:

Por cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que se $0 < |x - x_0| < \delta$ então $|f(x) - \lambda| < \varepsilon$.

Sejam agora $\mathcal{U} = \mathbb{R}$, $P(x, \delta)$ o predicado $0 < |x - x_0| < \delta$ e $Q(x, \varepsilon)$ o predicado $|f(x) - \lambda| < \varepsilon$. A definição de limite se transcreve em lógica dos predicados como:

$$(\forall \varepsilon)[(\varepsilon > 0) \rightarrow (\exists \delta)[(\delta > 0) \rightarrow [P(x, \delta) \rightarrow Q(x, \varepsilon)]]] \ .$$

Negar a definição de limite e traduzir-la em português corrente.

2.5 Regras de inferencia adicionais da lógica dos predicados

A lógica dos predicados segue todas as regras da logica proposicional, mas sendo uma sua extensão, satisfaz a umas regras adicionais, especificas para tratar a interface entre proposições e predicados[3].

1. *Instanciação Universal*[4] = Do universal ao particular.

   $(\forall x)P(x) \implies$ para todo elemento fixado x_0 do universo $\mathcal{U}$ a proposição $P(x_0)$ é verdadeira

2. *Generalização Universal.*

   Se a proposição $P(x_0)$ é verdadeira por cada elemento x_0 *arbitrario* de $\mathcal{U} \implies (\forall x)P(x)$

3. *Instanciação Existencial.*

   $(\exists x)P(x) \implies$ existe x_0, elemento (fixado) de $\mathcal{U}$, tal que a proposição $P(x_0)$ seja verdadeira

4. *Generalização Existencial.*

   Se a proposição $P(x_0)$ é verdadeira para um elemento *fixado*[5] de $\mathcal{U} \implies (\exists x)P(x)$

Em particular ressaltamos que a *generalização universal* nos ensina como provar uma proposição do tipo $(\forall x)P(x)$.

2.5.1 O Sillogismo Aristotélico.

Com estas regras adicionais podemos finalmente exprimir e comprender e demonstrar o silogismo da introdução. Seja $\mathcal{U}$ o universo de todos os seres humanos e não humanos do universo, vivos ou não. Seja $P(x)$ o predicado: x é um homem. Seja $Q(x)$ o predicado: x é mortal. Seja s o elemento "Socrate"de $\mathcal{U}$. O silogismo de pagina 11 se pode exprimir da seguente forma:

Todos os homens são mortais	$(\forall x)[P(x) \rightarrow Q(x)]$	$\Big\} \implies Q(s)$
Socrates é um homem		
então Socrate é mortal	$P(s)$	

[3]Temos que esclarecer o seguinte: na logica completamente formal, os simbolos $\forall$ e $\exists$ são completamente privos de significados. As regras seguintes esclarecem o significado deles (ensinam como se usam). A subtileza aqui é que o simbolo x em $\forall x$ ou em $\exists x$ é uma *variável* e não um *elemento* do conjunto universo $\mathcal{U}$, ou seja, são coisas de tipo diferente. As regras seguintes permitem de passar de um enunciado que comprende uma variável a um enunciado sobre elementos (concretos) de um conjunto $\mathcal{U}$.

[4]chamada também Especificação Universal, ou Eliminação Universal

Demostração. Temos:

$$\left.\begin{array}{c}(\forall x)[P(x) \to Q(x)] \\ \\ P(s)\end{array}\right\} \implies \left.\begin{array}{c}P(s) \to Q(s) \\ \\ P(s)\end{array}\right\} \implies Q(s)$$

onde usamos a istantiação universal e o modus ponens.

Exemplo 2.15. Tomamos como predicados $Q(x) = (\exists k)(x = 4k)$, ou seja, x é múltiplo de 4 e $P(x) = (\exists k)(x = 2k)$, ou seja, x é par, os dois com universo $\mathcal{U} = \mathbb{N}$. Supomos que queremos mostrar a proposição: qualquer múltiplo de 4 é par, ou seja:

$$(\forall x)(Q(x) \to P(x)) .$$

A demonstração poderia ser feita como segue:

Demonstração. Seja $x_0 \in \mathbb{N}$ arbitrario. Vamos provar, antes de tudo, que a proposição

$$Q(x_0) \to P(x_0)$$

é verdadeira. Quando isto for feito, a regra de *generalização universal* nos garantirà que a proposição $(\forall x)(Q(x) \to P(x))$ é verdadeira. Para mostrar a implicação $Q(x_0) \to P(x_0)$, onde $x_0 \in \mathbb{N}$ é arbitrario, consideramos os dois casos: $Q(x_0) = F$, e $Q(x_0) = V$.
Primeiro caso: $Q(x_0) = F$, ou seja, x_0 não é multiplo de 4. Nesta caso a implicação é da forma

$$F \to ?$$

ou seja, é sempre verdadeira[6]
Segundo caso: $Q(x_0) = V$, ou seja, a proposição $(\exists k)(x_0 = 4k)$ é verdadeira. Então a regra de *istanciação existencial* nos diz que existe k_0 fixado em $\mathbb{N}$ tal que $x_0 = 4k_0$. Os axiomas dos números inteiros (que vamos ver mais tarde) nos permitem de deduzir que, dado que $4 = 2 \cdot 2$:

$$x_0 = 4k_0 \implies x_0 = (2 \cdot 2)k_0 \implies x_0 = 2(2k_0) .$$

Mas então existe um número fixado $h_0 = 2k_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$x_0 = 2h_0 .$$

Usamos a *generalização existencial* para deduzir

$$x_0 = 2h_0 \implies (\exists h)(x_0 = 2h) = P(x_0) .$$

Ou seja da veridicidade de $Q(x_0)$ deduzimos a veridicidade de $P(x_0)$. Mas então, neste caso a implicação

$$Q(x_0) \to P(x_0)$$

é verdadeira, porquê da forma $V \to V$. Então mostrarmos que em qualquer caso a implicação

$$Q(x_0) \to P(x_0)$$

é verdadeira, com x_0 *arbitrario.* Invocamos agora a *generalização universal* para deduzir

$$(\forall x)(Q(x) \to P(x)) .$$

□

[6]Na pratica, quando queremos demonstrar uma implicação, este passo é sempre trivialmente verdadeiro: ou seja, mostrar a verdade de uma implicação com hipótese falsa é sempre trivialmente verdadeiro e na pratica nem vem mencionado

2.6 Distribuição, Indipendença e Movimento dos Quantificadores

2.6.1 Distribuição.

Temos as duas *equivalências*:

D1) $(\forall x)(P(x) \wedge Q(x)) \Leftrightarrow (\forall x P(x)) \wedge (\forall x Q(x))$, por cada universo $\mathcal{U}$;

D2) $(\exists x)(P(x) \vee Q(x)) \Leftrightarrow (\exists x P(x)) \vee (\exists x Q(x))$, por cada universo $\mathcal{U}$;

Exercicio 2.16. Demonstrar as equivalências, por cada universo $\mathcal{U}$. (Sugestão: usar as regras de inferencia adicionais da lógica dos predicados: instanciações e generalizações).

Temos as duas *implicações*:

d3) $(\forall x P(x)) \vee (\forall x Q(x)) \Rightarrow (\forall x)(P(x) \vee Q(x))$, por cada universo $\mathcal{U}$;

d4) $(\exists x)(P(x) \wedge Q(x)) \Rightarrow (\exists x P(x)) \wedge (\exists x Q(x))$, por cada universo $\mathcal{U}$;

Exercicio 2.17. Provar que, nas regras d3) e d4) as implicações inversas não valem. Para demonstrar que as implicações inversas não valem, é suficiente demonstrar que não valem em algum úniverso especifico.

2.6.2 Indipendência

Temos as *equivalências*:

I1) $(\forall x)(\forall y)P(x,y) \Leftrightarrow (\forall y)(\forall x)P(x,y)$, por cada universo $\mathcal{U}$;

I2) $(\exists x)(\exists y)P(x,y) \Leftrightarrow (\exists y)(\exists x)P(x,y)$, por cada universo $\mathcal{U}$;

Temos a *implicação*:

i3 $(\exists x)(\forall y)P(x,y) \Rightarrow (\forall y)(\exists x)P(x,y)$, por cada universo $\mathcal{U}$;

2.6.3 Movimento.

Temos as seguintes *equivalencias:*

M1) $(\Phi \wedge (\forall x)\Psi(x)) \Leftrightarrow (\forall x)(\Phi \wedge \Psi(x))$, por cada universo $\mathcal{U}$, onde Φ é um predicato onde x não é livre.

M2) $(\Phi \vee (\forall x)\Psi(x)) \Leftrightarrow (\forall x)(\Phi \vee \Psi(x))$, por cada universo $\mathcal{U}$, onde Φ é um predicato onde x não é livre.

M3) $(\Phi \wedge (\exists x)\Psi(x)) \Leftrightarrow (\exists x)(\Phi \wedge \Psi(x))$, por cada universo $\mathcal{U}$, onde Φ é um predicato onde x não é livre.

M4) $(\Phi \vee (\exists x)\Psi(x)) \Leftrightarrow (\exists x)(\Phi \vee \Psi(x))$, por cada universo $\mathcal{U}$, onde Φ é um predicato onde x não é livre.

M5) $(\Phi \rightarrow (\forall x)\Psi(x)) \Leftrightarrow (\forall x)(\Phi \rightarrow \Psi(x))$, por cada universo $\mathcal{U}$, onde Φ é um predicato onde x não é livre.

M6) $(\Phi \rightarrow (\exists x)\Psi(x)) \Leftrightarrow (\exists x)(\Phi \rightarrow \Psi(x))$, por cada universo $\mathcal{U}$, onde Φ é um predicato onde x não é livre.

M7) $((\forall x)\Phi(x) \rightarrow \Psi) \Leftrightarrow (\exists x)(\Phi(x) \rightarrow \Psi))$, por cada universo $\mathcal{U}$, onde Ψ é um predicato onde x não é livre.

M8) $((\exists x)\Phi(x) \rightarrow \Psi) \Leftrightarrow (\forall x)(\Phi(x) \rightarrow \Psi))$, por cada universo $\mathcal{U}$, onde Ψ é um predicato onde x não é livre.

Exercicio 2.18. Provar que a definição de limite $\lim_{x \to x_0} f(x) = \lambda$ para uma função f de uma variável real, dada acima, é equivalente a:

$$(\forall \varepsilon)(\exists \delta)[((\varepsilon > 0) \wedge (\delta > 0)) \rightarrow [P(x,\delta) \rightarrow Q(x,\varepsilon)]]]$$

o que é equivalente a tomar o universo $\mathcal{U} = \mathbb{R}_{>0}$ e a enunciar:

$$(\forall \varepsilon)(\exists \delta)[P(x,\delta) \rightarrow Q(x,\varepsilon)]$$

onde $P(x,\delta)$ e $Q(x,\varepsilon)$ são definidos como $P(x,\delta) : 0 < |x - x_0| < \delta$ e $Q(x,\varepsilon) : |f(x) - \lambda| < \varepsilon$.

3 A estrutura lógica da matemática

3.1 Conceito primitívos e axiomas

A fundação de cada teoria matemática se baseia sobre *conceitos primitivos*, ou seja conceitos que não vão ser definidos nem demonstrados e que têem que ser aceites assim como estão. Uma primeira motivação (superficial) consiste no fato que estes conceitos primitivos são muitas vezes tão perto da intuição de não precisar nenhuma definição; uma segunda e mais importante, porquê é impossivel definir tudo e porquê é preciso começar de um ponto de partida. Este ponto de partida são os conceitos primitivos. Por exemplo, na geometria euclidiana plana e espacial estes conceitos primitivos são os *ponto, reta, plano, espaço.* Na teoria dos conjuntos, são o conceito de conjunto, de conjunto vazio, e conceito (e símbolo $\in$) de pertença.

O que se pode fazer com conceitos primitivos? Nada, se antes não explicamos as relações entre estes conceitos. O que sirve tomar como ponto de partída os conceitos de ponto, reta, plano, se não sabemos como se comportam entre eles e quais são as relações entre estes objetos? De uma certa forma, os conceitos que até aqui tomamos como primitívos são puramente formais e não têem ainda nenhum significado matemático até que não explicamos as relações entre eles. *É nas relações entre estes objetos que o significado deles se esclarece.* As primeiras proposições que esclarecem as relações entre conceitos primitivos, proposições que *não podem ser demonstradas, porquê ainda nada se sabe sobre estes conceitos*, são chamadas *axiomas.* Por exemplo na geometria plana a proposição:

Por dois pontos passa uma e uma só reta.

é um axioma; nunca podia ser demonstrado, se os conceitos primitivos são ponto, reta e plano.

3.2 Definições

Uma *definição* matemática é um enunciado que declara em forma muito precisa o significado de um novo termo, símbolo ou objeto. O significado deste novo termo ou objeto depende *exclusivamente* de quanto estabelecido na definição.

Do ponto de vista da lógica formal uma definição tem forma:

$$(\forall x)(P(x) \leftrightarrow Q(x))$$

ou seja, *dizemos que um objeto tem propriedade* $P(x)$ SE E SOAMENTE SE *tem a propriedade* $Q(x)$, onde $Q(x)$ é uma propriedade já definida, enquanto $P(x)$ é a propriedade ou o conceito que estamos a definir.

Enfatizamos que o conetor lógico que é usado é $\leftrightarrow$, ou seja, SE E SOAMENTE SE. Por exemplo, a

Definição. Um numero natural é par se é multiplo de 2

se traduz, do ponto de vista da lógica formal como:

$$(\forall n)(P(n) \leftrightarrow Q(n))$$

onde $P(n)$ é o predicado "n é par"que estamos a definir, e $Q(n)$ é $(\exists k)(n = 2k)$, com universo $\mathbb{N}$. Note-se que na definição não esta escrito "Um numero natural é par se e soamente se é multiplo de 2"; mas so "Um numero natural é par se e soamente se é multiplo de 2": mas é convenção que, numa definição, o "se"se intende sempre "se e soamente se". Então a definição "Um numero natural é par se é multiplo de 2"fica exactamente:

$$(\forall n)[P(n) \leftrightarrow (\exists k)(n = 2k)] \ .$$

O fato que temos o conetor lógico de equivalencia $\leftrightarrow$ nos permite, cada vez que encontramos un numero natural multiplo de 2, de dizer (ou melhor de "reconhecer") que é par.

Vamos, a titulo exemplificativo, definir que n é impar. Podemos dar a definição seguinte: seja $R(n)$ o predicado n é impar: então:

$$(\forall n)[R(n) \leftrightarrow \neg P(n)] \ .$$

Agora com estas duas definições podemos tentar de mostrar o fato seguinte:

Proposição 3.1. *Um numero natural é impar se e soamente se $n = 2k + 1$, por um certo k natural.*

Usaremos alguns conceitos de aritmetica que seram explicados em detalhes mais tarde, mas que são de conhecimento de todos.

Demonstração. Supomos sue n é impar. Então não é par. Usando a definição, podemos dizer, que n nunca se pode escrever como $2k$, por algum k natural, porquê então seria par. Dividimos n por 2; obtemos: $n = 2q+r$, onde o resto r é $0 \leqslant r \leqslant 1$. Mas se fosse $r = 0$, teriamos $n = 2q$, então n seria par, mas não é; a única possibilidade é que $r = 1$. Então $n = 2q + 1$. E demostramos um implicação. Esta parte da demostração prova em particular que 1 é impar.

Do outro lado, se $n = 2k + 1$, se n fosse par, então $n = 2h$, por um certo h. Mas então: $2k + 1 = 2h$, o que implica $2(k - h) = 1$. Qualquer sejam k e h, teriamos que 1 é multiplo de 2, ou seja, que 1 é par. Mas ja sabiamos que 1 era impar, ou seja, não par. Temos uma contradição, que surge do fato que assumimos que n era par. Isto não pode ser, então n é impar. $\square$

Exercicio 3.2. Encontrar todos os pontos onde se usou de forma essencial a implicação $\leftarrow$ nas definições de par e impar e todos os pontos onde se usou a implicação $\rightarrow$.

3.3 Teoremas e Contraexemplos

Um *teorema*(ou uma *proposição, lema, corolário*[7]) é um enunciado que segue logicamente de enunciados ja estabelecidos, como outros teoremas, definições, ou aceites sem demostração, ou seja axiomas. Uma

[7]dependentemente da importancia que o autor der ao enunciado que esta a provar; o lema é comunemente um resultado parcial que se usa para demonstrar um teorema; um corolário é uma consequencia direta de um teorema

demonstração é um argumento, baseado sobre axiomas, definições, e outros teoremas ja provados, que prova a veridicidade do enunciado do teorema. Uma demonstração segue as regras de derivação lógica (de equivalencia lógica e de inferencia) da lógica proposicional e da lógica dos predicados. Falaremos mais do conceito de demonstração na parte dedicada as tecnicas de demonstração.

Uma nota sobre uma terminología as vezes usada. Diremos que uma proposição A é mais forte do que uma proposição B, se $A \implies B$. É facil provar que se A é mais forte do que B, então, se C é outra proposição, $B \to C$ é mais forte do que $A \to C$.

Exercicio 3.3. Provar que se A é mais forte do que B, então $(A \to C) \to D$ é mais forte do que $(B \to C) \to D$.

Contraexemplos. Supomos que temos que decidir se uma proposição da forma

$$(\forall x)P(x)$$

é verdadeiro ou falso. Supomos que queremos mostrar que é falso. Temos que $p := (\forall x)P(x)$ é falso se e soamente se $\neg p := \neg(\forall x)P(x)$ é verdadeiro, dado que $V = p \vee \neg p$ e que $p \wedge \neg p = F$ (*tertium non datur*). Agora a veridicidade de $\neg(\forall x)P(x)$, dada a regra de negação universal, é equivalente a veridicidade de

$$(\exists x)(\neg P(x)) \ .$$

O que significa[8] que *existe um elemento particular* x_0 *no universo* $\mathcal{U}$ *tal que* $\neg P(x_0)$ *é verdadeira*, ou seja, $P(x_0)$ *é falsa*). Este elemento particular x_0 se chama *contraexemplo*. Para mostrar que uma proposição do tipo $(\forall x)P(x)$ é falsa é suficiente (equivalente) encontrar um contraexemplo.

Outras vezes temos que considerar a veridicidade ou falsidade de proposições do tipo

$$(\forall x)(P(x) \to Q(x)) \ . \ .$$

Se a proposição $(\forall x)(P(x) \to Q(x))$ é falsa, então é verdadeira a proposição $\neg(\forall x)(P(x) \to Q(x))$, que, pelas regra de negação universal, torna-se $(\exists x)\neg(P(x) \to Q(x))$, que torna-se $(\exists x)P(x) \wedge \neg Q(x)$: ou seja, a proposição $(\forall x)(P(x) \to Q(x))$ é falsa se e sómente se existe um x_0 no universo $\mathcal{U}$ tal que $P(x_0) \wedge \neg Q(x_0)$ ou seja, tal que $P(x_0)$ é verdadeira e $Q(x_0)$ é falsa: em outras palavras $(\forall x)(P(x) \to Q(x))$ é falsa se e soamente se existe um *contraexemplo* x_0 no universo tal que x_0 verifica a hipótese da proposição condicional, mas que invalida a tese.

Exemplo 3.4. Por cada numero real x, $x^2 \geqslant x$. Traduzimos a proposição em lógica formal. Seja $\mathcal{U} = \mathbb{R}$ o universo e $P(x)$ o predicado $x^2 \geqslant x$. A proposição se traduz como

$$(\forall x)P(x) \ .$$

Mas se repara facilmente que se $x_0 = 1/2$, então $(1/2)^2 < 1/2$. Então existe um particular elemento $x_0 = 1/2$ no universo tal que $P(1/2)$ é falsa. $1/2$ é um contraexemplo à veridicidade da proposição. Então a proposição

$$(\forall x)P(x)$$

é falsa.

Exemplo 3.5. Por cada natural n, se n é primo, então $2^n + 1$ é primo.

[8]A equivalencia dos dois factos segue das duas regras de istanciação existencial e de generalização existencial

4 Tecnicas de demonstração

4.1 Prova direta

Proposição 4.1. *Por cada* $x \in \mathbb{R}$*, se* $x \geqslant 1$*, então* $x^2 \geqslant x$*.*

Obsevamos que, definidos os predicados $P(x) : x \geqslant 1$ e $Q(x) : x^2 \geqslant x$, a proposição a demonstrar é $(\forall x)(P(x) \to Q(x))$. Fazemos uma demonstração direta, usando os axiomas dos números reais (ver apêndice A.2) e usando alguns teoremas e resultados que são provados na teoria dos números reais, como, por exemplo, o fato que $1 > 0$.

Demonstração. Seja $x_0 \in \mathbb{R}$, $x_0 \geqslant 1$, um *arbitrario número real maior ou igual a um.* Sabemos que $1 > 0$; sabemos que, pelo axioma RO13 a ordem é transitiva, e então que se $x_0 > 1$, e se $1 > 0$, isto implica que $x_0 > 0$. Sabemos, pelo axioma RO15 (compatibilidade da ordem com a multiplicação), que $x_0 > 0$ e $x_0 > 1$, então $x_0 \cdot x_0 > x_0 \cdot 1$, mas agora $x_0 \cdot 1 = x_0$ pelo axioma R6. Então obtemos que $x_0^2 > x_0$. Acabamos de provar que se $x_0 \in \mathbb{R}$ é um particular número real $x_0 \geqslant 1$, então $x_0^2 \geqslant x_0$. Ou seja, obtemos que, dado um número real x_0, a proposição $P(x_0) \to Q(x_0)$ é verdadeira. Mas x_0 foi escolhido arbitrariamente, isto implica que por cada $x_0 \in \mathbb{R}$, $P(x_0) \to Q(x_0)$. Mas a regra de *generalização universal* implica que

$$\text{por cada } x_0 \in \mathbb{R},\ P(x_0) \to Q(x_0) \implies (\forall x)(P(x) \to Q(x)) \ .$$

□

Exercicio 4.2. Na demonstração acima, aplicamos varias vezes a regra de inferencia *modus ponens*, sem dizer. Encontrar os pontos onde o modus ponens for aplicado.

4.2 Por contraposição

Proposição 4.3. *Por cada* $x, y \in \mathbb{R}$*,* $x, y \geqslant 0$*, então* $\dfrac{x+y}{2} \neq \sqrt{xy}$ *implica* $x \neq y$*.*

Observação 4.4. Podemos usar como universo $\mathcal{U}$ o conjunto dos números reais positivos, ou seja $\mathcal{U} = \mathbb{R}_{>0}$. A proposição a demonstrar torna-se $(\forall x)(\forall y)(P(x,y) \longrightarrow Q(x,y))$ com $P(x,y)$ o predicado $\frac{x+y}{2} \neq \sqrt{xy}$, e com $Q(x,y)$ o predicado $x \neq y$.

Demonstração. Demonstramos a proposição por contrapositivo: é equivalente demonstrar

$$(\forall x)(\forall y)(\neg Q(x,y) \to \neg P(x,y)) \ ,$$

sendo $\neg Q(x,y) \to \neg P(x,y)$ o contrapositivo de $P(x,y) \longrightarrow Q(x,y)$. Mas $\neg Q(x,y)$ é o predicado $(x = y)$ e $\neg P(x,y)$ é o predicado $\frac{x+y}{2} = \sqrt{xy}$. Sejam x, y fixados arbitrarios em $\mathbb{R}$ e supomos então dado $\neg Q(x,y)$. Mas então $x = y$, mas então, usando os axiomas dos números reais (quais?) e alguns fatos sobre raizes quadradas (quais?), temos $\frac{x+y}{2} = y = \sqrt{y \cdot y} = \sqrt{xy}$. Ou seja, dados x, y fixados arbitrarios em $\mathbb{R}$, acabamos de monstrar a implicação $\neg Q(x,y) \longrightarrow \neg P(x,y)$. Mas x, y eram arbitrarios, e, como na demonstração precedene, por generalização universal deduzimos

$$(\forall x)(\forall y)(\neg Q(x,y) \longrightarrow \neg P(x,y)) \ ,$$

que é equivalente, por contrapositivo, a $(\forall x)(\forall y)(P(x,y) \longrightarrow Q(x,y))$. □

4.3 Por contradição ou absurdo

Proposição 4.5. *Sejam l, m, n retas complanares. Se l, m são perpendiculares a mesma reta n, então l e m são paralelas.*

Observação 4.6. Indicaremos aqui α o plano em que as retas l, m, n estão, e com $\mathcal{U}$ o universo das retas do plano α. Seja $P(x, y)$ o predicado x é perpendicular a y e $Q(x, y)$ o predicado x é paralela a y. Então temos que mostrar a proposição $(\forall l)(\forall m)(\forall n)(P(l, n) \wedge P(m, n) \rightarrow Q(l, m))$.

Demonstração. Demonstramos a proposição por absurdo. Ou seja, assumimos $\neg(\forall l)(\forall m)(\forall n)(P(l, n) \wedge P(m, n) \rightarrow Q(l, m))$ e deduzimos uma contradição. Por a regra de negação universal, aplicada iterativamente, temos que $\neg(\forall l)(\forall m)(\forall n)(P(l, n) \wedge P(m, n) \rightarrow Q(l, m))$ é logicamente equivalente a $(\exists l)(\exists m)(\exists n)(P(l, n) \wedge P(m, n) \wedge \neg Q(l, m))$. Este enunciado, que fica assumido por absurdo, implica, por a instantiação existencial, que existem retal l_0, m_0, n_0 fixadas no universo $\mathcal{U}$ das retas do plano α, tais que l_0 é perpendicular a n_0, m_0 é perpendicular a n_0, mas l_0 e m_0 não são paralelas. Em particular são distintasDuas retas coincidentes são paralelas por definição, ou seja $l_0 \neq m_0$. Mas tambem $l_0 \neq n_0$, porquê l_0 é perpendicular a n_0, e, pela mesma razão, $m_0 \neq n_0$. Seja $A = l_0 \cap m_0$; $B = l_0 \cap n_0$, $C = m_0 \cap n_0$. Segue que $B \neq C$, porquê l_0 e m_0 são distintas, e $A \neq B$ e $A \neq C$ porquê l_0 e m_0 são distintas. Então o triangulo ABC não é degenere; então por um teorema de geometria plana, a soma dos seus angulos internos é $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = \pi$. Mas $\hat{B} = \pi/2$ e $\hat{C} = \pi/2$; então $\hat{B} + \hat{C} = \pi$ e $\hat{A} = 0$. Mas l_0 e m_0 são distintas e necessariamente formam um angulo $\hat{A}$ positivo. Mas então $\hat{A} = 0$ e $\hat{A} \neq 0$. Seja p a proposição $\hat{A} = 0$. Mas então deduzimos $p \vee \neg p = F$, ou seja, uma contradição. $\square$